

4. Logaritmy a jejich vlastnosti

pr. $f: y = a^x \Rightarrow f^{-1}: x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$
 FCE EXPONENCIÁLNÍ $\Rightarrow$ FCE INVERZNÍ: FCE LOGARITHMICKÁ

DEFINICE

LOGARITMUS ČÍSLA $x \in \mathbb{R}^+$ O NÁKLADU $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ JE EXPONENT y , KTERÝM MUSÍME UMOCNIT NÁKLAD a , ABYCHOM DOSTALI ČÍSLO x .

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

pr. $\log_2 8 = y \Leftrightarrow 2^y = 8$ NEBO $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
 2 má y je 8 $2^y = 2^3$ $y = 3$ 2 má nákladů je 8

pr. $\log_{(10)} 0,01 = \log_{(10)} 10^{-2} = -2$ $\log 0,01 = y \Leftrightarrow 10^y = 0,01$
 $10^y = \frac{1}{100}$
 $10^y = 10^{-2} \Rightarrow y = -2$

ROZLIŠUJEME SPECIÁLNÍ

- DEKADICKÝ (náklad 10) $\log x (= \log_{10} x \dots$ náklad 10 neopomíjíme)
- PŘÍROZENÝ (náklad e) $\ln x (= \log_e x \dots e = 2,718281 \dots$ Eulerovo číslo) iracion.

PLATÍ

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \text{ (dos. na y)}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

pr. $3^{\log_3 x} = x$ $4^{\log_4 2} = 2$

VĚTY O LOGARITMECH (PRAVIDLA PRO POČÍTÁNÍ)

Pro $x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ a $k, b \in \mathbb{R}^+$ platí:

- $\log_a (k \cdot b) = \log_a k + \log_a b$ log. součinů čísel (nížani) je rovný součnu log. jednotlivých čísel (nížani)
 pr. $\log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x$ pr. $\log_3 5 + \log_3 x = \log_3 5x$
- $\log_a \left(\frac{k}{b}\right) = \log_a k - \log_a b$ log. podílů 2 čísel (nížani) je rovný rozdíl log. jednotlivých čísel (nížani)
 pr. $\log_5 \frac{x}{2} = \log_5 x - \log_5 2$ pr. $\log_5 4 + \log_5 5 - \log_5 2 = \log_5 \frac{4 \cdot 5}{2} = \log_5 10 = 1$
- $\log_a k^b = b \log_a k$ (b $\in \mathbb{R}$) log. mocniny je rovný součinu exponentu a logaritmu nákladu mocniny
 pr. $\log_7 x^3 = 3 \log_7 x$ pr. $x \log_4 2 = \log_4 2^x$

PŘEVODNÍ VZTAHY MEZI LOGARITMY O RŮZNÝCH ZÁKLADECH

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ pro } a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \text{ a } x \in \mathbb{R}^+ \text{ [využ. při výpočtech na kalkulačce nebo při převodu na 1 logaritmus]}$$

pr. $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} (= \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \dots)$ pr. $\frac{\log 8}{\log 2} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e} \text{ [} \ln x = \log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{\log x}{\log e} \text{] } \log_a a = \frac{1}{\log_a b}$$

DALŠÍ VZTAHY

$\log_a a = 1$ pr. $\log_3 3 = 1$ [$3^1 = 3$]

$\log_a 1 = 0$ pr. $\log_3 1 = 0$ [$3^0 = 1$]

$$\left[\log_a a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \right]$$

pr. $\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3}$

Příklady

① Určit

*.28 a) $\log_6 6 = \log_6 6^1 = 1$ b) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$ c) $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$

d) $\log_2 0,5 = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$ [$2^x = 0,5$ $2^x = \frac{1}{2}$ $2^x = 2^{-1}$ $x = -1$]

! e) $\log_9 \sqrt{3} = \log_9 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = 0,25$! f) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$

[$9^x = 3^{\frac{1}{2}}$ $3^{2x} = 3^{\frac{1}{2}}$] [$(\frac{1}{3})^x = 3$ $3^{-x} = 3^1$]
 $2x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{1}{4}$ $-x = 1$ $x = -1$

g) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

[$(\frac{1}{2})^x = 16$ $-x = 4$]
 $2^{-x} = 2^4$ $x = -4$

h) $\log_{10} \sqrt{10} = \log_{10} 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$\log 10^3 = 3$

$\log \frac{1}{1000} = \log 10^{-3} = \log 10^{-3} = -3$

② Vypočít

*.30 a) $5^{\log_5 2} = 2$ b) $10^{\log_{10} 1} = 1$ [$\log_{10} 1 = 0$]
 $\log_{10} 1 = 0$ $10^0 = 1$

c) $8^{1+\log_8 5} = 8^1 \cdot 8^{\log_8 5} = 8 \cdot 5 = 40$
 $(a^{x+y} = a^x \cdot a^y)$

d) $2^{\log_2 3+2} + 3^{\log_3 25} = 2^{\log_2 3} \cdot 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 4 + 9 = 12 + 9 = 21$

③ Určit věkma $x \in (0, +\infty)$, pro nich platí:

*.31 a) $\log_2 x = 0$ $\log_2 x = 1$ $\log_2 x = 3$ $\log_2 x = -\frac{1}{5}$
 $2^0 = x$ $2^1 = x$ $2^3 = x$ $2^{-\frac{1}{5}} = x$
 $x = 1$ $x = 2$ $x = 8$ $x = \frac{1}{2^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

b) $\log_5 x = -3$ $\log_5 x = -1$ $\log_5 x = 0$ $\log_5 x = -\frac{1}{3}$
 $5^{-3} = x$ $5^{-1} = x$ $5^0 = x$ $5^{-\frac{1}{3}} = x$
 $x = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ $x = \frac{1}{5}$ $x = 1$ $x = \frac{1}{5^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

④ Určit $a \in \mathbb{R}$ ZÁKLAD $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

*.33 a) $\log_a 4 = 2$ b) $\log_a 0,0001 = -2$ c) $\log_a 25 = 2$
 $a^2 = 4$ $a^{-2} = 10^{-4}$ $a^2 = 25$
 $a = 2$ $a = (10^{-2})^{-2} = 10^2$ $a = 5$
 $a = 2$ $a = 100$

⑤ vypočítat

a) $\log_2(\log_2 16) = \log_2 4 = 2$
 $[\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4]$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 4) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$
 $[\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2]$

c) $\log_5 \frac{1}{25} - (\log_{\frac{1}{3}} 9)^2 - \log_{\frac{1}{2}} 4^2 = -2 - (-2)^2 - (-4)$

$\left[\begin{array}{ccc} 5^x = \frac{1}{25} & (\frac{1}{3})^y = 9 & (\frac{1}{2})^z = 4^2 \\ 5^x = 5^{-2} & 3^{-y} = 3^2 & 2^{-z} = (2^2)^2 \\ x = -2 & y = -2 & -z = 4 \\ & & z = -4 \end{array} \right] = -2 - 4 + 4 = -2$

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
 $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
 $\log_a x^b = b \log_a x$

⑥ vypočítat

a) $4 \log_6 3 + 5 \log_6 2 - \log_6 12 = \log_6 3^4 + \log_6 2^5 - \log_6 12 =$
 $= \log_6 \frac{3^4 \cdot 2^5}{12} = \log_6 \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{12} = \log_6 (3^3 \cdot 2^3) = \log_6 6^3 = 3$
 $(a^m \cdot b^n) = (ab)^{mn}$

b) $\log_5 \frac{1}{125} - 3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = \log_5 \frac{1}{5^3} - 3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^6} = \log_5 5^{-3} - 3 \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^6 =$
 $= -3 - 3 \cdot 6 = -21$

c) $4 \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{3} - 2 \log_{\frac{1}{4}} \frac{2}{9} = \log_{\frac{1}{4}} (\frac{1}{3})^4 - \log_{\frac{1}{4}} (\frac{2}{9})^2 = \log_{\frac{1}{4}} \frac{(\frac{1}{3})^4}{(\frac{2}{9})^2} =$
 $= \log_{\frac{1}{4}} \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9}} = \log_{\frac{1}{4}} \frac{(\frac{1}{81})}{(\frac{4}{81})} = \log_{\frac{1}{4}} \frac{81}{4 \cdot 81} = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} = 1$

⑦ vypočítat

a) $\log_4 16^{-0,5} = -0,5 \log_4 16 = -0,5 \log_4 4^2 = -0,5 \cdot 2 = -1$

b) $\log_{10} 1500 - \log_{10} 15 = \log_{10} \frac{1500}{15} = \log_{10} 100 = 2$

c) $\log_5 10 + \log_5 12,5 = \log_5 (10 \cdot 12,5) = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

d) $\log_2 8 - 4 \log_2 2 + \log_2 32 = \log_2 2^3 - 4 \cdot 1 + \log_2 2^5 = 3 - 4 + 5 = 4$
 $= \log_2 \frac{8 \cdot 32}{2^4} = \log_2 \frac{2 \cdot 32^4}{16} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

e) $2(\log_{\frac{1}{3}} 9) - \ln 1 = 2(2 - 2) - 0 = 2 \cdot 0 - 0 = 0$

$\left[\begin{array}{l} (\frac{1}{3})^x = 9 \\ 3^{-x} = 3^2 \\ x = -2 \end{array} \right] \quad [\ln 1 = 0]$

nebo
 $= 2 \log_{\frac{1}{3}} 9 - 0 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = 4 - 4 = 0$

③ Logaritmické (předpokládáme příslušné hodnoty)

a) $y = \frac{(a+b)^2}{c}$

$$\log y = \log \frac{(a+b)^2}{c} = \log (a+b)^2 - \log c = 2 \log (a+b) - \log c$$

b) $y = \frac{a^2 b^3}{100 \sqrt{c}}$

$$\begin{aligned} \log y &= \log \frac{a^2 b^3}{100 \sqrt{c}} = \log a^2 + \log b^3 - \log 100 - \log c^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 \log a + 3 \log b - 2 - \frac{1}{2} \log c \quad [\log 100 = \log 10^2 = 2] \end{aligned}$$

c) $y = \frac{a^2 \sqrt[3]{b+1}}{\sqrt{c} \cdot \sqrt[5]{d^2}}$

$$\begin{aligned} \log y &= \log a^2 + \log (b+1)^{\frac{1}{3}} - \log c^{\frac{1}{2}} - \log d^{\frac{2}{5}} = \\ &= 2 \log a + \frac{1}{3} \log (b+1) - \frac{1}{2} \log c - \frac{2}{5} \log d \end{aligned}$$

④ Odlogaritmické (uvědomujeme) pro příslušné hodnoty:

a) $\log y = \log 3 - 2 \log 5$

$$\log y = \log 3 - \log 5^2$$

$$\log y = \log \frac{3}{25}$$

$$y = \frac{3}{25} \quad [y > 0]$$

b) $\log y = \log 2 - 2 \log \kappa + \log \pi$

$$\log y = \log 2 - \log \kappa^2 + \log \pi$$

$$\log y = \log \frac{2\pi}{\kappa^2}$$

$$y = \frac{2\pi}{\kappa^2} \quad [y > 0, \kappa > 0]$$

c) $\log y = 4 \log (x-5) + 2$ FGL

$$\log y = \log (x-5)^4 + \log 10^2$$

$$\log y = \log [100 (x-5)^4]$$

$$y = 100 (x-5)^4$$

2. nahradíme log o příslušnou hodnotu - kde nahradíme 10

$$2 = \log_{10} 10^2$$

$$[\text{nebo } \log_{10} x = 2, x = 10^2]$$

$$[y > 0, x-5 > 0, x > 5]$$

d) $\log_4 y = 6 \log_4 (4-x) - \log_4 x - 3$! ma náklad 4

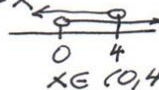
$$\log_4 y = \log_4 (4-x)^6 - \log_4 x - \log_4 4^3$$

$$\log_4 y = \log_4 \frac{(4-x)^6}{x \cdot 4^3}$$

$$y = \frac{(4-x)^6}{64x}$$

$$[\text{nebo } \log_4 x = 3, 4^3 = x]$$

$$[y > 0, 4-x > 0 \wedge x > 0, 4 > x]$$



e) $\log_3 y = 3 \log_3 x - \log_3 (2x-1) - 1$

$$\log_3 y = \log_3 x^3 - \log_3 (2x-1) - \log_3 3^1$$

$$\log_3 y = \log_3 \frac{x^3}{(2x-1) \cdot 3}$$

$$y = \frac{x^3}{3(2x-1)}$$

! ma náklad 3 $1 = \log_3 3^1$

$$[\text{nebo } \log_3 x = 1, 3^1 = x]$$

$$[y > 0, x > 0 \wedge 2x-1 > 0, 2x > 1, x > \frac{1}{2}]$$

$$x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$$